CHAPITRE 4

MODÈLE LINÉAIRE D'UN SYSTÈME

1. Caractéristique entrée-sortie et point de repos.

On prend l'exemple d'un système constitué par un moteur à courant continu muni d'un amplificateur destiné à son alimentation.
L'entrée du système est constituée par la tension de commande de l'amplificateur et sa sortie sera, par exemple, la vitesse du moteur.
Si l'on relève la caractéristique entrée-sortie de ce système, on obtient une courbe représentée à la figure 4.1.

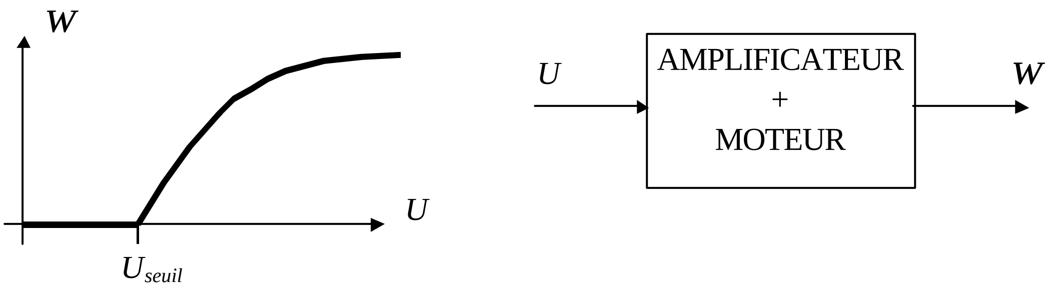
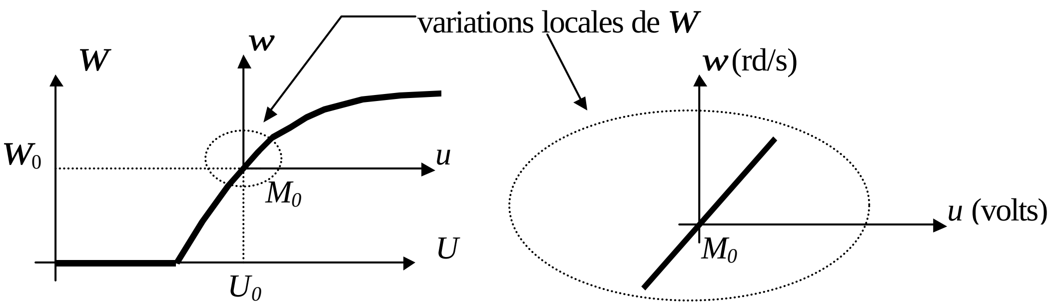


Figure 4.1.

Lorsque la tension d'alimentation U est trop faible, le moteur ne tourne pas car les frottements sont trop importants, puis, passé un certain seuil U_{seuil}, le moteur démarre. Sa vitesse W est alors croissante avec la tension d'alimentation jusqu'au moment où, l'amplificateur étant saturé, la vitesse W n'augmente plus avec la tension U. Ainsi la caractéristique statique obtenue n'est pas linéaire. On est donc confronté à un système non-linéaire et son étude devient compliquée.
Il est possible néanmoins d'entreprendre une étude locale en considérant le système linéaire autour d'un point M_0 (Figure 4.2.).



a) b)

Figure 4.2.

Le point M_0 de coordonnées (U_0, W_0) est appelé *point de repos* ou *point de fonctionnement*. On pose $w = W - W_0$ et $u = U - U_0$ et on étudie alors les variations locales w de la sortie en fonction des variations u de l'entrée autour du point de repos choisi. La caractéristique $w = f(u)$ peut alors être considérée comme une droite passant par l'origine. Sa pente est le gain statique du *système linéarisé*, c'est aussi la pente de la tangente en M_0 à la caractéristique $W=F(U)$.
Des exemples concrets de linéarisation seront abordés en TD.

2. Régime statique, régime dynamique.

Régime statique ou permanent
Régime de fonctionnement d'un système lorsqu'il est soumis à une excitation invariante dans le temps.

Régime dynamique
Régime de fonctionnement d'un système lorsqu'il est soumis à une excitation variable dans le temps autour d'un point de repos.

Remarque: On utilisera préférablement le terme *statique* à celui de *permanent* car ce terme rend bien compte du fait que le régime décrit correspond à une excitation constante dans le temps (qui ne change pas ==> *statique*).

La figure 4.2 b) représente graphiquement la relation linéaire entre l'entrée u et la sortie w du système, en *régime statique (permanent).*
Lorsque l'on applique une variation brutale de la tension d'entrée u, la vitesse du moteur n'atteint pas instantanément sa valeur en régime permanent statique, car le moteur présente une inertie propre. Le moteur fonctionne alors en *régime dynamique*. Ce régime est transitoire (il dure un certain temps), le temps que le système se stabilise, c'est à dire que le moteur atteigne la vitesse correspondant à la tension appliquée à l'entrée.
La figure 4.3. illustre ces propos. A une tension constante E_0 due à une variation positive de la tension d'entrée à partir du point de repos correspond une vitesse de régime permanent W_0 atteinte après un régime transitoire correspondant au fonctionnement dynamique du moteur.
On a alors $W_0=K.E_0$, K étant le gain statique défini au §1.

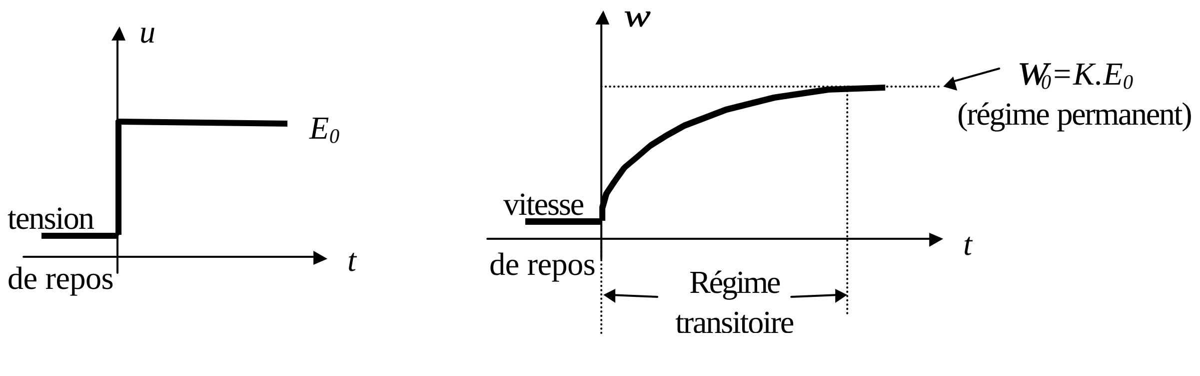


Figure 4.3.

3. Forme générale des lois d'entrée-sortie.

On appelle $x(t)$ et $y(t)$ les signaux d'entrée et de sortie d'un système linéaire à temps invariant. La relation qui permet de rendre compte de la dynamique de ce système est une équation différentielle linéaire comprenant des coefficients indépendants du temps. L'équation linéaire rend compte du régime dynamique, et donc également du régime *statique* qui constitue un cas particulier correspondant à des signaux d'entrée et de sortie constants (indépendants du temps). Il suffit donc d'annuler les dérivées dans l'équation différentielle décrivant un système pour rendre compte du régime permanent.

<u>Exemple:</u>

On considère un système régi par l'équation différentielle suivante : $0{,}5\dot{y} + y = 3x$
Le régime *statique* s'exprime par $y = 3x$, ce qui donne un gain statique de 3 USI.

<u>Remarque:</u> On peut observer la dynamique du système dans le terme $0{,}5\dot{y}$. L'homogénéité de l'équation oblige à considérer 0,5 comme un temps puisque $\dot{y} = \frac{dy}{dt}$.