CHAPITRE 5

SYSTÈMES DU PREMIER ORDRE

1. Équation différentielle – Fonction de transfert.

On appelle système du premier ordre, un système régi par une équation différentielle du type :

$$\tau.\frac{dy}{dt} + y = K.x$$

> τ est appelée constante de temps du système. τ est homogène à un temps.
> K est le gain statique du système (gain en régime permanent).

En appliquant la transformée de Laplace à cette équation, on obtient :

$$\tau pY(p) - \tau y(0^+) + Y(p) = KX(p)$$

Lorsque les conditions initiales sont nulles : $(\tau p + 1)Y(p) = KX(p)$

La fonction de transfert du système est alors: $H(p) = \dfrac{Y(p)}{X(p)} = \dfrac{K}{1+\tau p}$

Cette fonction de transfert possède un pôle simple: $-1/\tau$.

<u>Exemple</u>:

$\theta_e \longrightarrow$ Thermomètre $\longrightarrow \theta_s$

Soit un thermomètre à mercure placé dans une ambiance à la température θ_e. Si l'appareil est précis, au bout d'un temps assez long, il indiquera une température $\theta_s = \theta_e$. C'est le régime permanent pour lequel le mercure est à la température ambiante.

Si θ_e varie rapidement, θ_s est relié à θ_e par une équation différentielle traduisant le fait que, d'une part, pendant un temps dt, la quantité de chaleur dQ échangée avec le mercure est proportionnelle à la différence $\theta_e - \theta_s$ et que, d'autre part, la vitesse avec laquelle s'effectue la dilatation du mercure $d\theta_s/dt$ est proportionnelle à la quantité de chaleur échangée:

$$dQ = k_1.(\theta_e - \theta_s).dt \quad \text{et} \quad \frac{d\theta_s}{dt} = k_2.\frac{dQ}{dt}$$

soit : $\dfrac{1}{k_1.k_2}.\dfrac{d\theta_s}{dt} + \theta_s = \theta_e$

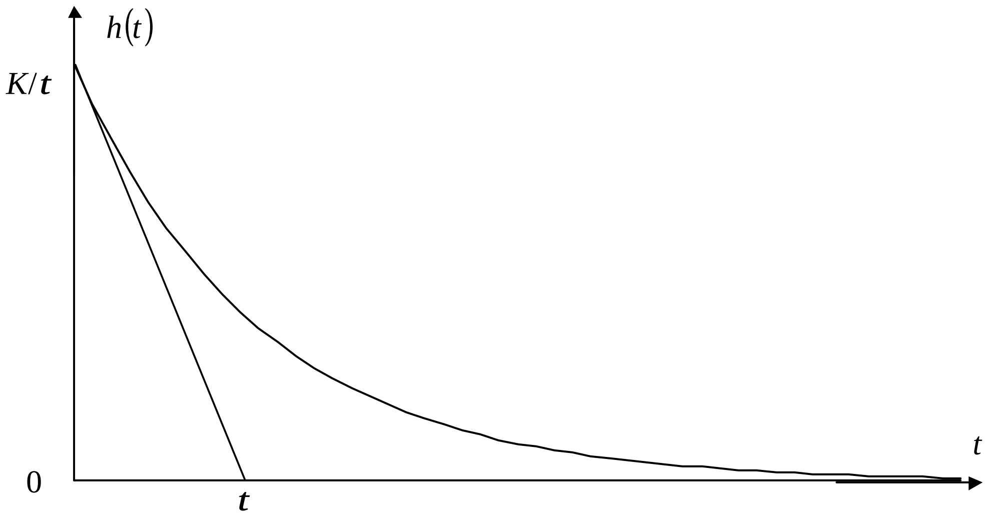
avec : $\tau = \dfrac{1}{k_1.k_2}$

2. Réponse impulsionnelle.

La réponse impulsionnelle du système est donnée par : $h(t) = \mathrm{LP}^{-1}[H(p)]$

soit : $h(t) = \mathrm{LP}^{-1}\left[\dfrac{K}{\tau p+1}\right] = \dfrac{K}{\tau}.e^{-t/\tau}.u(t)$

On constate d'après cette expression que le système est stable si $\tau>0$.

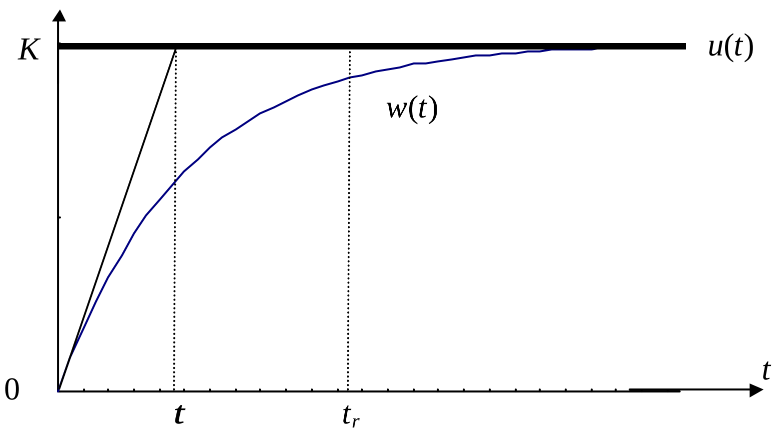


3. Réponse indicielle.

Cette réponse est obtenue pour $x(t)=u(t)$, soit $X(p)=1/p$. On peut ici calculer son expression littérale:

$$w(t)=LP^{-1}[H(p)/p]=\mathrm{LP}^{-1}\left[\frac{K}{p(\tau p+1)}\right]=\frac{K}{\tau}\tau(1-e^{-t/\tau})).u(t) \qquad (w(t)=0 \text{ pour } t<0)$$

d'où : $w(t)=K(1-e^{-t/\tau}).u(t)$



La pente à l'origine est égale à K/τ.
Le temps de réponse à 5% est à peu près égal à 3τ.

Remarque :
Sur cette dernière courbe, la dénomination de constante de temps pour $\boldsymbol{t}$ prend toute sa signification: plus $\boldsymbol{t}$ est petit, plus vite le système atteint son régime statique.

4. Réponse à une rampe.

Cette réponse est obtenue pour $x(t) = a.t.u(t)$

On a $X(p) = a/p^2$, et : $Y(p) = \frac{K}{\boldsymbol{t}} . \frac{1}{p + 1/\boldsymbol{t}} . \frac{a}{p^2}$

d'où : $y(t) = \frac{K.a}{\boldsymbol{t}} \boldsymbol{t}^2 \left(e^{-t/t} + \frac{t}{\boldsymbol{t}} - 1 \right) u(t)$

Démonstration de ce dernier calcul suivant une méthode (parmi plusieurs):

Méthode des fractions rationnelles:

Si $Y(p)$ se présente sous la forme $M(p)/N(p)$, dont le dénominateur est de degré égal ou supérieur à celui du numérateur, ce qui est le cas ici, on peut décomposer $Y(p)$ en fractions rationnelles :

$$Y(p) = \frac{A_{11}}{(p - p_1)^n} + \frac{A_{12}}{(p - p_1)^{n-1}} + ... + \frac{A_{1n}}{p - p_1} + \frac{A_2}{p - p_2} + \frac{A_3}{p - p_3}.$$

où p_1 est un pôle multiple de $Y(p)$ de multiplicité n, p_2, p_3 des pôles simples de $Y(p)$.

Les différents coefficients de la décomposition se calculent suivant les relations:

$$A_{11} = \left| (p - p_1)^n . Y(p) \right|_{p = p_1}$$

$$A_{12} = \left| \frac{d}{dp} \left[(p - p_1)^n . Y(p) \right] \right|_{p = p_1}$$

$$A_{13} = \left| \frac{1}{2} \frac{d^2}{dp^2} \left[(p - p_1)^n . Y(p) \right] \right|_{p = p_1}$$

...

Dans notre cas, on a : $Y(p) = \frac{A_{11}}{p^2} + \frac{A_{12}}{p} + \frac{A_2}{p + 1/\boldsymbol{t}}$

avec :

$$A_{11} = \left| p^2 . \frac{K.a}{p^2(\boldsymbol{t}.p + 1)} \right|_{p=0} = K.a$$

$$A_{12} = \left| \frac{d}{dp} \frac{K.a}{\boldsymbol{t}.p + 1} \right|_{p=0} = \left| \frac{-K.a.\boldsymbol{t}}{(\boldsymbol{t}.p + 1)^2} \right|_{p=0} = -K.a.\boldsymbol{t}$$

$$A_2 = \left| \frac{K.a}{2.p.(\boldsymbol{t}.p+1)+\boldsymbol{t}.p^2} \right|_{p=-1/t} = K.a.\boldsymbol{t}$$

Finalement : $Y(\,p\,) = \dfrac{K.a}{p^2} - \dfrac{K.a.\boldsymbol{t}}{p} + \dfrac{K.a.\boldsymbol{t}}{p+1/\,\boldsymbol{t}}$

Ce qui donne : $y(t) = K.a.t - K.a.\boldsymbol{t} + K.a.\ \boldsymbol{t}.e^{-t/\,t}$

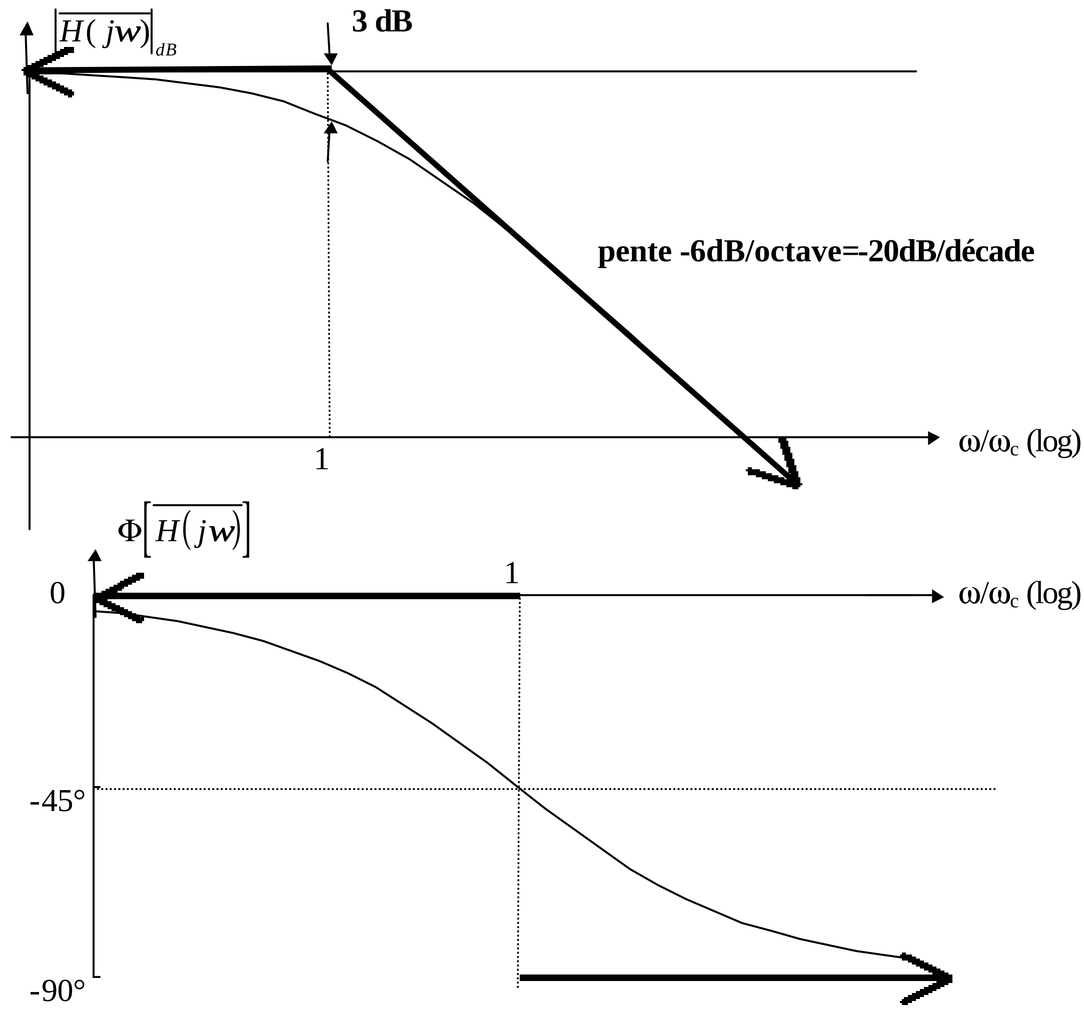
On retrouve l'expression déjà présentée.

5. Régime harmonique.

La transmittance isochrone du système est : $\overline{H(\,j\boldsymbol{w})} = \dfrac{K}{1+\,j.\boldsymbol{w}.\boldsymbol{t}}$

Les différentes représentations sont alors :

5.1 Représentation de Bode.



Le système possède une fréquence de coupure pour $\boldsymbol{w}_c = 1/\boldsymbol{t}$.

En effet, le maximum local est ici $\left|\overline{H(0)}\right|$. La pulsation de coupure est définie pour :

$$\left|\overline{H(j\omega_c)}\right|_{dB} - \left|\overline{H(0)}\right|_{dB} = -3dB$$

c'est à dire : $$20.log\left(\frac{\left|\overline{H(j\omega)}\right|}{\left|\overline{H(0)}\right|}\right) = 20.log\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

d'où : $$\left|\overline{H(j\omega_c)}\right| = \frac{\left|\overline{H(0)}\right|}{\sqrt{2}}$$

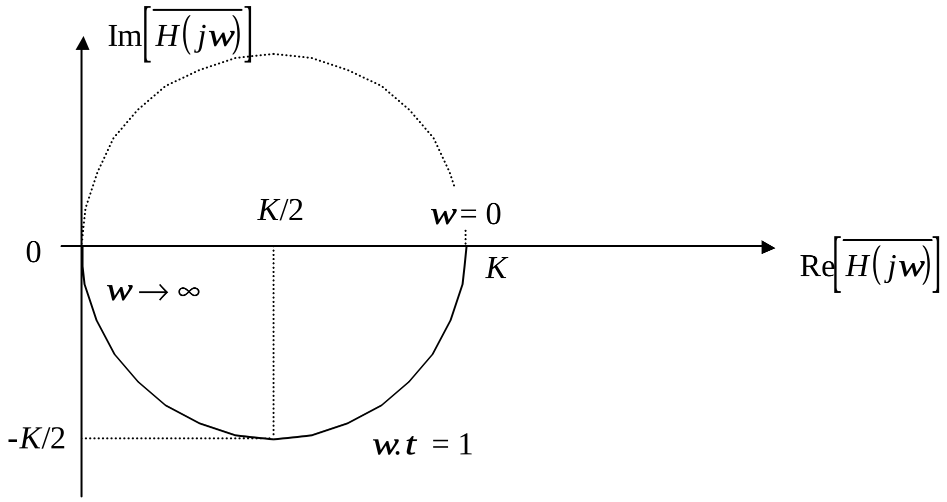
soit : $$\frac{K}{\sqrt{1+(\omega_c.\tau)^2}} = \frac{K}{\sqrt{2}}$$

donc : $$1 + (\omega_c.\tau)^2 = 2$$

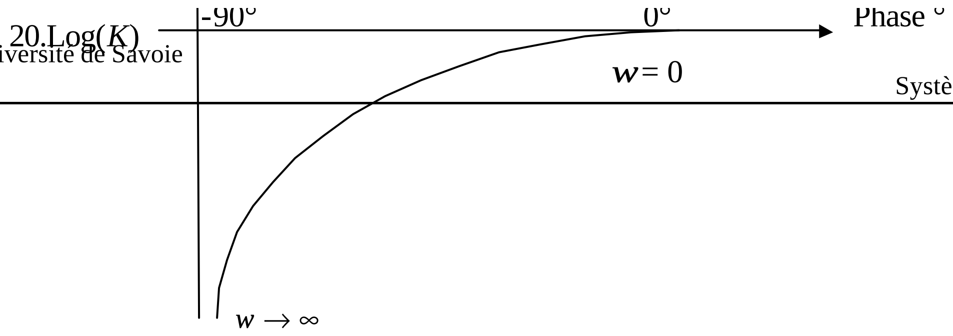
et : $$\omega_c.\tau = 1$$

Pour cette fréquence, le déphasage est : $Arg\left[\overline{H(j\omega_c)}\right] = -ArcTan[\omega_c\tau] = -\frac{\pi}{4}$.

5.2 Représentation dans le plan de Nyquist.



5.3 Représentation de Black.



6. Relation temps-fréquence.

La dynamique d'un système du premier ordre est entièrement décrite par sa constante de temps τ. Cette dynamique peut également s'exprimer dans le domaine des fréquences.
On appelle f_c, fréquence de coupure, la fréquence pour laquelle le gain (module de la fonction de transfert) du système, en régime harmonique, est atténué de 3dB par rapport au maximum du module de la fonction de transfert.
On appelle t_m le temps de montée du système. t_m représente le temps mis par la sortie du système pour passer de 10% à 90% de la valeur finale atteinte en régime permanent pour une entrée de type échelon.
La réponse indicielle d'un système du premier ordre s'exprime: $w(t) = K\left(1 - e^{-t/\tau}\right).u(t)$, $u(t)$ étant un échelon unitaire (voir §3). Donc les temps t_{10} et t_{90} correspondant respectivement à 10% et 90% de la valeur finale en régime permanent (K) s'obtiennent simplement:

$$y(t_{10}) = 0{,}1.K = K\left(1 - e^{-t_{10}/\tau}\right) \quad \text{et} \quad y(t_{90}) = 0{,}9.K = K\left(1 - e^{-t_{90}/\tau}\right)$$

D'où :

$$t_m = t_{90} - t_{10} = \tau.\ln(9) \approx 2{,}2\tau$$

Or :

$$f_c = \frac{\omega_c}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\tau}$$

Donc :

$$t_m = \frac{\ln(9)}{2\pi f_c} \quad => \quad \boxed{t_m.\,f_c = \frac{\ln(9)}{2\pi} \approx 0{,}35}$$

Cette relation est d'application pratique très utile.

<u>Exemples:</u>

- Un oscilloscope (considéré comme un système du premier ordre) possède une bande passante à 3dB f_c=100Mhz, son temps de montée propre est donc : t_m=3,5 nanosecondes.
- Un enregistreur graphique dont le temps de montée t_m est égal à 0,2 secondes possède une fréquence de coupure f_c=1,8Hz ; il ne peut donc pas être utilisé pour enregistrer sans erreur des signaux sinusoïdaux de fréquence supérieure à 2Hz environ.

On retiendra qu'un système à large bande passante est un système rapide.