

---



---

TD 3  
LINEARISATION

---



---

**1 Équation différentielle.****1.1 Équation différentielle du premier ordre**

Soit un système dynamique, d'entrée  $x$  et de sortie  $y$  régi par l'équation différentielle:

$$a \frac{dy}{dt} + f(y) = x \quad \text{avec } a = \text{constante} \quad (1)$$

1. Les coordonnées du point de repos sont  $x_0$  et  $y_0$ . Montrer que  $f(y_0) = x_0$ .
2. En développant au premier ordre en série de Taylor la fonction  $f(y)$  autour de  $y_0$ , réécrire l'équation (1).
3. On pose  $\Delta x = x - x_0$  et  $\Delta y = y - y_0$  qui représentent respectivement les variations de  $x$  et de  $y$  autour du point de repos. Écrire l'équation différentielle qui lie  $\Delta x$  et  $\Delta y$ .
4. Applications. Écrire l'équation différentielle lorsque:
  - $f(y) = \sin y$  point de repos  $x_0 = 0$  puis  $x_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .
  - $f(y) = \frac{\sqrt{y}}{R}$  point de repos  $x_0$ .

**1.2 Équation différentielle du second ordre**

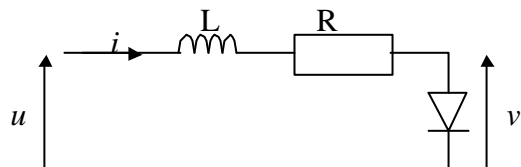
En poursuivant le raisonnement amorcé, linéariser l'équation différentielle du second ordre suivante:

$$a \frac{d^2 y}{dt^2} + f\left(\frac{dy}{dt}\right) + g(y) = x$$

autour du point de repos  $M_0(x_0, y_0)$ , avec  $\left[\frac{dy}{dt}\right]_0 = 0$ . On posera aussi  $\Delta x = x - x_0$  et  $\Delta y = y - y_0$ .

**2 Résistance non linéaire dans un circuit électrique.**

On considère le circuit suivant:



Le courant  $i$  dans la diode est une fonction exponentielle de la tension  $v$  à ses bornes. A la température ordinaire, on a:

$$i = a(e^{40v} - 1) \approx a e^{40v} \quad \text{pour } v > 0,2 \text{ Volts}$$

1. Écrire l'équation différentielle liant  $i$  et  $u$ .
2. On appelle  $M_0(u_0, i_0)$  le point de repos,  $\Delta u$  et  $\Delta i$  les petites variations. Trouver l'équation différentielle liant  $\Delta u$  et  $\Delta i$ .